Coloração Harmoniosa

Júlio C. S. Araújo; **Ana Beatriz da S. Martins**; Marcio C. Santos.

Paralelismo, Grafos e Otimização
Pós-graduação em Matemática
Departamento de Matemática

Universidade Federal do Ceará (UFC)

07/10/2022

Preliminares

Preliminares

Definição

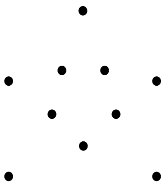
Um grafo G é uma tripla que consiste de:

Preliminares

Definição

Um grafo G é uma tripla que consiste de:

- Um conjunto de vértices $V(G)$;

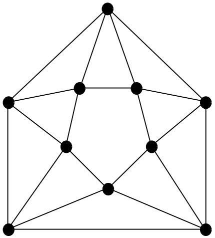


Preliminares

Definição

Um grafo G é uma tripla que consiste de:

- Um conjunto de vértices $V(G)$;
- Um conjunto de arestas $E(G)$;

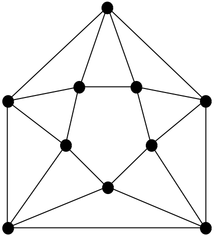


Preliminares

Definição

Um grafo G é uma tripla que consiste de:

- Um conjunto de vértices $V(G)$;
- Um conjunto de arestas $E(G)$;
- Uma relação que associa a cada aresta um par de vértices (não necessariamente distintos), denominados extremidades.



Preliminares

Definição

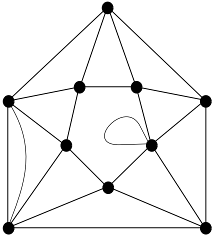
Um grafo G é uma tripla que consiste de:

- Um conjunto de vértices $V(G)$;
- Um conjunto de arestas $E(G)$;
- Uma relação que associa a cada aresta um par de vértices (não necessariamente distintos), denominados extremidades.

Definição

Um grafo simples é um grafo que não possui:

- Arestas múltiplas;
- Laços.



Preliminares

Definição

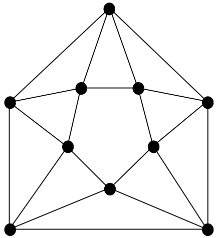
Um grafo G é uma tripla que consiste de:

- Um conjunto de vértices $V(G)$;
- Um conjunto de arestas $E(G)$;
- Uma relação que associa a cada aresta um par de vértices (não necessariamente distintos), denominados extremidades.

Definição

Um grafo simples é um grafo que não possui:

- Arestas múltiplas;
- Laços.



Preliminares

Preliminares

Definição

Uma *k-coloração* dos vértices de um grafo $G = (V, E)$ é uma função $c\colon V(G) \to [k]$.

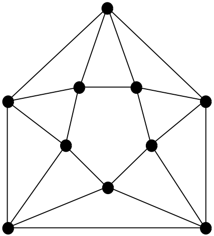
Preliminares

Definição

Uma *k-coloração* dos vértices de um grafo $G = (V, E)$ é uma função $c\colon V(G) \to [k]$.

Definição

Uma coloração é *própria* se $\forall uv \in E(G)$ temos $c(u) \neq c(v)$.



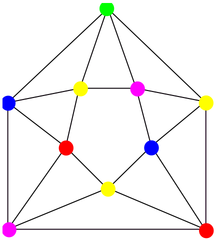
Preliminares

Definição

Uma *k-coloração* dos vértices de um grafo $G = (V, E)$ é uma função $c\colon V(G) \to [k]$.

Definição

Uma coloração é própria se $\forall uv \in E(G)$ temos $c(u) \neq c(v)$.



Preliminares

Definição

Uma *k-coloração* dos vértices de um grafo $G = (V, E)$ é uma função $c\colon V(G) \to [k]$.

Definição

Uma coloração é *própria* se $\forall uv \in E(G)$ temos $c(u) \neq c(v)$.

Definição

O *número cromático* de G é $\chi(G) = \min\{k \mid G \text{ possui } k\text{-coloração própria}\}$.

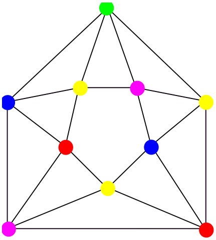


Figure: $\chi(G) = 5$?

Preliminares

Definição

Uma *k*-coloração dos vértices de um grafo $G = (V, E)$ é uma função $c\colon V(G) \to [k]$.

Definição

Uma coloração é própria se $\forall uv \in E(G)$ temos $c(u) \neq c(v)$.

Definição

O número cromático de G é $\chi(G) = \min\{k \mid G \text{ possui } k\text{-coloração própria}\}$.

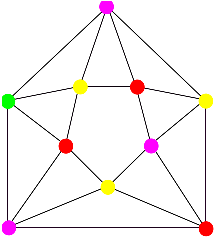


Figure: $\chi(G) = 4$.

Preliminares

Preliminares

Definição

Uma k-coloração é linha-distinguível se cada par de arestas distintas tem conjuntos de cores distintos em suas extremidades.

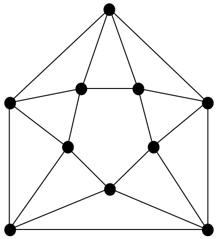
Preliminares

Definição

Uma k-coloração é linha-distinguível se cada par de arestas distintas tem conjuntos de cores distintos em suas extremidades.

Definição

Uma coloração é harmoniosa se é linha-distinguível e própria.



Preliminares

Definição

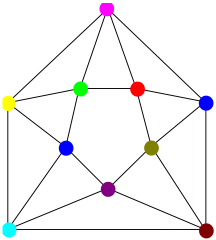
Uma k-coloração é linha-distinguível se cada par de arestas distintas tem conjuntos de cores distintos em suas extremidades.

Definição

Uma coloração é harmoniosa se é linha-distinguível e própria.

Definição

O número cromático harmonioso de G é $h(G) = \min\{k \in \mathbb{N} \mid G \text{ admite uma } k\text{-coloração harmoniosa}\}$.



Preliminares

Definição

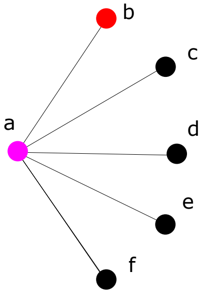
Uma k-coloração é linha-distinguível se cada par de arestas distintas tem conjuntos de cores distintos em suas extremidades.

Definição

Uma coloração é harmoniosa se é linha-distinguível e própria.

Definição

O número cromático harmonioso de G é $h(G) = \min\{k \in \mathbb{N} \mid G \text{ admite uma } k\text{-coloração harmoniosa}\}$.



Preliminares

Definição

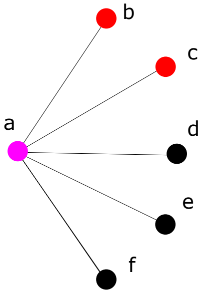
Uma k-coloração é linha-distinguível se cada par de arestas distintas tem conjuntos de cores distintos em suas extremidades.

Definição

Uma coloração é harmoniosa se é linha-distinguível e própria.

Definição

O número cromático harmonioso de G é $h(G) = \min\{k \in \mathbb{N} \mid G \text{ admite uma } k\text{-coloração harmoniosa}\}$.



Preliminares

Definição

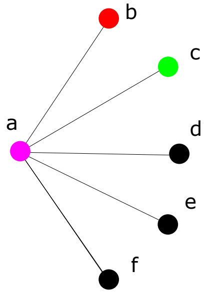
Uma k-coloração é linha-distinguível se cada par de arestas distintas tem conjuntos de cores distintos em suas extremidades.

Definição

Uma coloração é harmoniosa se é linha-distinguível e própria.

Definição

O número cromático harmonioso de G é $h(G) = \min\{k \in \mathbb{N} \mid G \text{ admite uma } k\text{-coloração harmoniosa}\}$.



Preliminares

Definição

Uma k-coloração é linha-distinguível se cada par de arestas distintas tem conjuntos de cores distintos em suas extremidades.

Definição

Uma coloração é harmoniosa se é linha-distinguível e própria.

Definição

O número cromático harmonioso de G é $h(G) = \min\{k \in \mathbb{N} \mid G \text{ admite uma } k\text{-coloração harmoniosa}\}$.

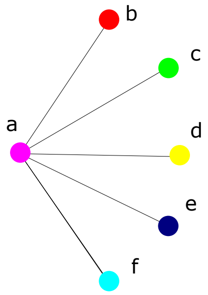


Figure: h(G)=n(G) se G é estrela

Por que estudar tal coloração?

Por que estudar tal coloração?

- É um problema definido recentemente [Lee; Mitchem, 1987];
- Este trabalho é o primeiro a oferecer formulações para esta coloração (existe um TCC na bibliografia que oferece formulações para colorações linha distinguível [Oliveira, 2019]);
- Determinar se um grafo é harmoniosamente k-colorível é NP-completo para árvores, grafos split, grafos de intervalo e grafos de permutação [Kolay; Sudeshna; et al., 2019];
- Os artigos mais recentes determinam, em geral, limitantes para alguma classe de grafo particular.

Resultados Gerais

Resultados Gerais

Teorema[Lee; Mitchem, 1987]

$\Delta(G) + 1 \leq h(G) \leq (\Delta(G)^2 + 1)\sqrt{n(G)}$.

Sabendo que vértices à distância 2 possuem cores diferentes, em 1992 o seguinte resultado foi enunciado:

Resultados Gerais

Teorema[Lee; Mitchem, 1987]

$\Delta(G) + 1 \leq h(G) \leq (\Delta(G)^2 + 1)\sqrt{n(G)}$.

Sabendo que vértices à distância 2 possuem cores diferentes, em 1992 o seguinte resultado foi enunciado:

Teorema [Kundrík, 1992]

$n(G) = h(G) \Leftrightarrow diam(G) \leq 2$.

Resultados gerais

Resultados gerais

Lema

Dados um grafo G de diâmetro pelo menos 3 e $k \in \mathbb{N}$, se $h(G) = k$, então existe um par de vértices que estejam à distância pelo menos 3 cuja identificação resulta em um grafo H tal que $h(H) = k$.

Teorema

Dados um grafo G e $k \in \mathbb{N}$, então $h(G) = k$ se, e somente se, existe sequência iterativa e exaustiva de identificações de vértices à distância pelo menos 3 que resulta em um grafo H tal que $diam(H) \leq 2$ e $n(H) = k$.

Uma observação análoga à ida deste teorema é feita e demonstrada em [Kolay; Sudeshna; et al., 2019].

Formulações de Programação Inteira

Modelo Padrão

Formulações de Programação Inteira

Modelo Padrão

Neste modelo, temos:

- $G = (V, E)$ um grafo e $k \in \mathbb{N}$ tais que $h(G) \leq k$;
- Variável $x_{v,i}$ para cada $v \in V$ e $i \in [k]$ tal que $x_{v,i} = 1$ representa que v recebe a cor i e $x_{v,i} = 0$, caso contrário;
- Variável binária w_i que representa quando a cor $i \in [k]$ é usada ou não.

Formulações de Programação Inteira

Modelo Padrão

Formulações de Programação Inteira

Modelo Padrão

- Função objetivo:

$$\min \sum_{i=1}^{k} w_i;$$

Formulações de Programação Inteira

Modelo Padrão

- Função objetivo:

$$\min \sum_{i=1}^{k} w_i;$$

- Todo vértice é colorido:

$$\sum_{i=1}^{k} x_{v,i} \geq 1 \quad v \in V(G);$$

Formulações de Programação Inteira

Modelo Padrão

- Função objetivo:

$$\min \sum_{i=1}^{k} w_i;$$

- Todo vértice é colorido:

$$\sum_{i=1}^{k} x_{v,i} \geq 1 \qquad v \in V(G);$$

- Se a cor i é usada em v, $w_i > 0$:

$$w_i \geq x_{v,i} \qquad i \in \{1, \ldots, k\}, \forall v \in V(G);$$

Formulações de Programação Inteira

Modelo Padrão

Formulações de Programação Inteira

Modelo Padrão

- As variáveis são binárias:

$$x_{v,i}, w_i \in \{0, 1\} \qquad v \in V(G), i \in [k];$$

Formulações de Programação Inteira

Modelo Padrão

- As variáveis são binárias:

$$x_{v,i}, w_i \in \{0,1\} \quad v \in V(G), i \in [k];$$

- A coloração é própria:

$$x_{v,i} + x_{u,i} \leq w_i \quad i \in [k], uv \in E(G);$$

Formulações de Programação Inteira

Modelo Padrão

- As variáveis são binárias:

$$x_{v,i}, w_i \in \{0,1\} \quad v \in V(G), i \in [k];$$

- A coloração é própria:

$$x_{v,i} + x_{u,i} \leq w_i \quad i \in [k], uv \in E(G);$$

- Vértices à distância 2 não recebem a mesma cor:

$$x_{v,i} + x_{u,i} \leq w_i \quad i \in [k] \;\; u, v \in V(N(v) \cap N(u) \neq \emptyset);$$

Formulações de Programação Inteira

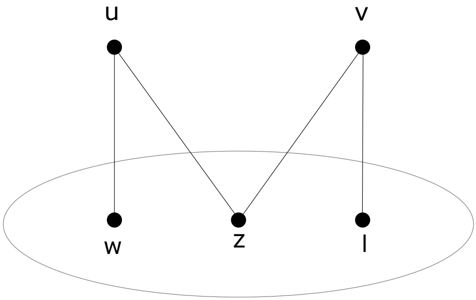
Modelo padrão

Formulações de Programação Inteira

Modelo padrão

- Duas arestas não adjacentes não possuem as mesmas cores em suas extremidades:

$$\sum_{w \in N(u)} x_{w,j} + \sum_{l \in N(v)} x_{l,j} \leq 3 - x_{v,i} - x_{u,i} \quad u, v \in V(G) \;\; uv \in \bar{E}(G) \;\; i \in [k].$$



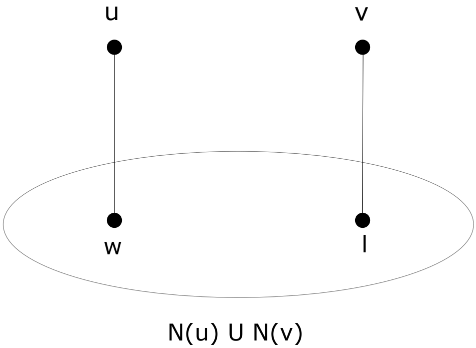
N(u) U N(v)

Formulações de Programação Inteira

Modelo padrão

- Duas arestas não adjacentes não possuem as mesmas cores em suas extremidades:

$$\sum_{w \in N(u)} x_{w,j} + \sum_{l \in N(v)} x_{l,j} \leq 3 - x_{v,i} - x_{u,i} \quad u, v \in V(G) \;\; uv \in \bar{E}(G) \;\; i \in [k].$$

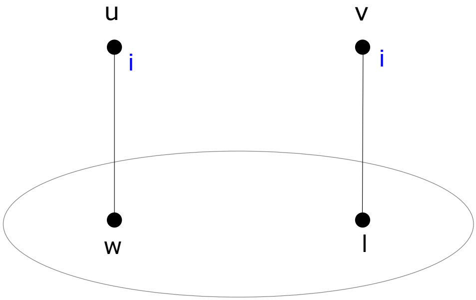


Formulações de Programação Inteira

Modelo padrão

- Duas arestas não adjacentes não possuem as mesmas cores em suas extremidades:

$$\sum_{w \in N(u)} x_{w,j} + \sum_{l \in N(v)} x_{l,j} \leq 3 - x_{v,i} - x_{u,i} \quad u, v \in V(G) \;\; uv \in \bar{E}(G) \;\; i \in [k].$$



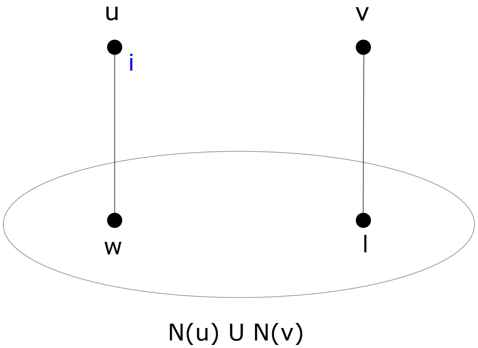
N(u) U N(v)

Formulações de Programação Inteira

Modelo padrão

- Duas arestas não adjacentes não possuem as mesmas cores em suas extremidades:

$$\sum_{w \in N(u)} x_{w,j} + \sum_{l \in N(v)} x_{l,j} \leq 3 - x_{v,i} - x_{u,i} \qquad u, v \in V(G) \;\; uv \in \bar{E}(G) \;\; i \in [k].$$

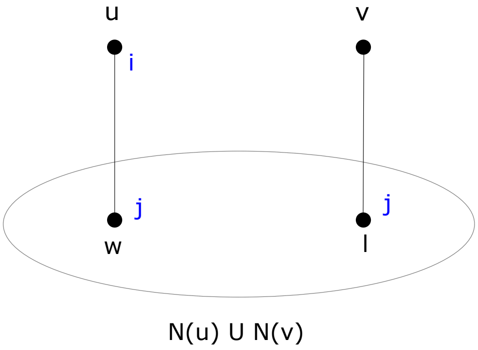


Formulações de Programação Inteira

Modelo padrão

- Duas arestas não adjacentes não possuem as mesmas cores em suas extremidades:

$$\sum_{w \in N(u)} x_{w,j} + \sum_{l \in N(v)} x_{l,j} \leq 3 - x_{v,i} - x_{u,i} \quad u, v \in V(G) \;\; uv \in \bar{E}(G) \;\; i \in [k].$$



Formulações de Programação Inteira

Modelo por Representantes

Formulações de Programação Inteira

Modelo por Representantes

Este modelo tem como guia as variáveis apresentadas em [Campêlo; Campos; Corrêa, 2008].

Formulações de Programação Inteira

Modelo por Representantes

Este modelo tem como guia as variáveis apresentadas em [Campêlo; Campos; Corrêa, 2008].

- $G = (V, E)$ um grafo e $k \in \mathbb{N}$ tais que $h(G) \leq k$;
- Variável binária x_{uv}, para todo $u \in V(G)$ e $v \in \overline{N_{G^2}}(u) \cup \{u\}$, indicando quando o vértice u é ou não o representante da cor dada ao vértice v.

Formulações de Programação Inteira

Modelo por Representantes

Formulações de Programação Inteira

Modelo por Representantes

- Função objetivo:

$$\min \sum_{u \in V} x_{uu};$$

Formulações de Programação Inteira

Modelo por Representantes

- Função objetivo:

$$\min \sum_{u \in V} x_{uu};$$

- Todo vértice é colorido:

$$\sum_{u \in (\overline{N_{G^2}}(v) \cup \{v\})} x_{uv} \geq 1 \quad v \in V(G);$$

Formulações de Programação Inteira

Modelo por Representantes

- Função objetivo:

$$\min \sum_{u \in V} x_{uu};$$

- Todo vértice é colorido:

$$\sum_{u \in (\overline{N_{G^2}}(v) \cup \{v\})} x_{uv} \geq 1 \quad v \in V(G);$$

- Se u é representante da cor de v, u é representante de si mesmo:

$$x_{uv} \leq x_{uu} \quad u \in V(G), v \in \overline{N_{G^2}}(u);$$

Formulações de Programação Inteira

Modelo por Representantes

Formulações de Programação Inteira

Modelo por Representantes

- As variáveis são binárias:

$$x_{uv} \in \{0,1\} \qquad u \in V(G), v \in \overline{N_{G^2}}(u) \cup \{u\};$$

Formulações de Programação Inteira

Modelo por Representantes

- As variáveis são binárias:

$$x_{uv} \in \{0,1\} \qquad u \in V(G), v \in \overline{N_{G^2}}(u) \cup \{u\};$$

- A coloração é própria:

$$x_{uv} + x_{uw} \leq x_{uu} \qquad u \in V(G) \;\; v, w \in \overline{N}_{G^2}(u) \; (vw \in E(G));$$

- As variáveis são binárias:

$$x_{uv} \in \{0,1\} \qquad u \in V(G), v \in \overline{N_{G^2}}(u) \cup \{u\};$$

- A coloração é própria:

$$x_{uv} + x_{uw} \leq x_{uu} \qquad u \in V(G) \;\; v, w \in \overline{N}_{G^2}(u) \; (vw \in E(G));$$

- Vértices à distância 2 não recebem a mesma cor:

$$\sum_{z \in \overline{N_{G^2}}(u) \cap N(v)} x_{uz} \leq x_{uu} \qquad v, u \in V(G);$$

Formulações de Programação Inteira

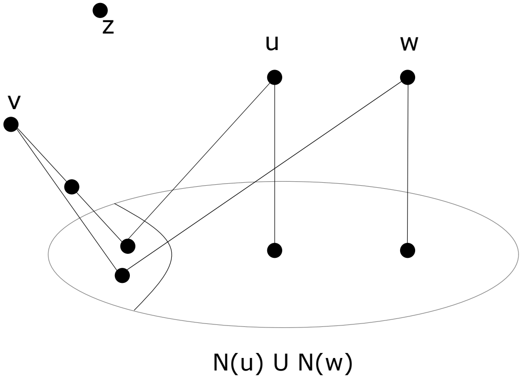
Modelo por Representantes

Formulações de Programação Inteira

Modelo por Representantes

- Duas arestas não adjacentes não possuem as mesmas cores em suas extremidades:

$$\sum_{l \in \overline{N_{G^2}}(v) \cap N(\{u,w\})} x_{vl} \leq 3 - x_{zu} - x_{zw} \quad v \in V(G),\ uw \notin E(G^2),\ z \in \overline{N_{G^2}}(\{u,w\}).$$

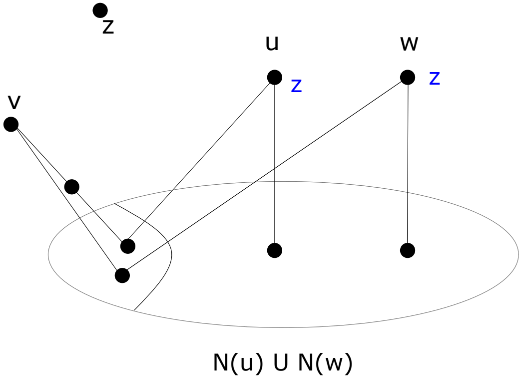


Formulações de Programação Inteira

Modelo por Representantes

- Duas arestas não adjacentes não possuem as mesmas cores em suas extremidades:

$$\sum_{l \in \overline{N_{G^2}}(v) \cap N(\{u,w\})} x_{vl} \leq 3 - x_{zu} - x_{zw} \quad v \in V(G),\ uw \notin E(G^2),\ z \in \overline{N_{G^2}}(\{u,w\}).$$

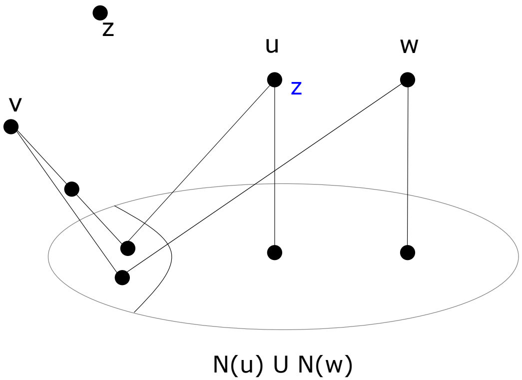


Formulações de Programação Inteira

Modelo por Representantes

- Duas arestas não adjacentes não possuem as mesmas cores em suas extremidades:

$$\sum_{l \in \overline{N_{G^2}}(v) \cap N(\{u,w\})} x_{vl} \leq 3 - x_{zu} - x_{zw} \quad v \in V(G),\ uw \notin E(G^2),\ z \in \overline{N_{G^2}}(\{u,w\}).$$

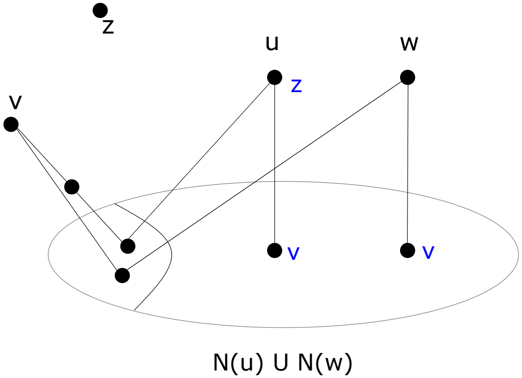


Formulações de Programação Inteira

Modelo por Representantes

- Duas arestas não adjacentes não possuem as mesmas cores em suas extremidades:

$$\sum_{l \in \overline{N_{G^2}}(v) \cap N(\{u,w\})} x_{vl} \leq 3 - x_{zu} - x_{zw} \quad v \in V(G),\ uw \notin E(G^2),\ z \in \overline{N_{G^2}}(\{u,w\}).$$



Formulações de Programação Inteira

Modelo Assimétrico por Representantes

Formulações de Programação Inteira

Modelo Assimétrico por Representantes

Este também tem como base as variáveis apresentadas em [Campêlo; Campos; Corrêa, 2008].

Formulações de Programação Inteira

Modelo Assimétrico por Representantes

Este também tem como base as variáveis apresentadas em [Campêlo; Campos; Corrêa, 2008].

- Existem simetrias no modelo por representantes;

Formulações de Programação Inteira

Modelo Assimétrico por Representantes

Este também tem como base as variáveis apresentadas em [Campêlo; Campos; Corrêa, 2008].

- Existem simetrias no modelo por representantes;
- $G = (V, A)$ um digrafo cujos arcos correspondem a uma ordem total em $V(G)$;
- Variável binária x_{uv}, para cada $u \in V(G^2)$ e $v \in \overline{N^-_{G^2}}(u)$, indicando quando o vértice u é ou não o representante da cor dada ao vértice v.

	Representantes		Padrão		Rep. Assimétrico	
Instância	GAP	Tempo	GAP	Tempo	GAP	Tempo
GRAPH_10_0.20_1.col	0.0	0.277	0.0	0.071	0.0	0.002
GRAPH_20_0.20_1.col	0.0	190.156	20.0	1800.032	0.0	0.29
GRAPH_30_0.20_1.col	28.571	1800.087	40.0	1800.049	0.0	0.388
GRAPH_40_0.20_1.col	65.0	1800.036	65.217	1800.227	0.0	17.422
GRAPH_50_0.20_1.col	30.0	1800.109	93.939	1801.281	0.0	1.465
GRAPH_10_0.40_1.col	0.0	0.001	0.0	3.841	0.0	0.001
GRAPH_20_0.40_1.col	0.0	0.0	15.789	1800.046	0.0	0.0
GRAPH_30_0.40_1.col	0.0	0.001	0.0	1006.648	0.0	0.0
GRAPH_40_0.40_1.col	0.0	0.0	95.0	1800.598	0.0	0.0
GRAPH_50_0.40_1.col	0.0	0.0	[]	[]	0.0	0.533
GRAPH_10_0.60_1.col	0.0	0.0	0.0	0.691	0.0	0.0
GRAPH_20_0.60_1.col	0.0	0.0	0.0	138.575	0.0	0.0
GRAPH_30_0.60_1.col	0.0	0.0	93.333	1800.117	0.0	0.0
GRAPH_40_0.60_1.col	0.0	0.0	95.0	1800.499	0.0	0.0
GRAPH_50_0.60_1.col	0.0	0.0	[]	[]	0.0	0.036
GRAPH_10_0.80_1.col	0.0	0.0	0.0	0.702	0.0	0.0
GRAPH_20_0.80_1.col	0.0	0.0	0.0	268.858	0.0	0.0
GRAPH_30_0.80_1.col	0.0	0.0	93.333	2547.575	0.0	0.0
GRAPH_40_0.80_1.col	0.0	0.0	[]	[]	0.0	0.0
GRAPH_50_0.80_1.col	0.0	0.0	[]	[]	0.0	1.173

Table: Comparação entre as formulações

Trabalhos Futuros

Trabalhos Futuros

- Investigar instâncias mais difíceis;
- Verificar se em certas classes de grafos existem algoritmos que resolvam o problema;
- Proposição e estudo de heurísticas para obtenção de soluções viáveis;
- Desenvolver uma revisão bibliográfica do tema.

Obrigada!